スピンのブラウン運動について

AUTHOR(S):

古川, 浩

スピンのブラウン運動について

九大理　古川　　浩

Kawabata[1]はKubo−Hashitsume[2]によるスピンのブラウン運動の現象論を議論しKubo−Hashitsume[2]の使ったLandau−Lifshitz項を仮定せず彼等と同じ結果を得た。ここではKawabata[1]と同じ条件で，しかも異った方法で同じ問題を議論してみたい。

磁気能率 $\mathbf{M}(t)=(M_x(t),\ M_y(t),\ M_z(t))$ は次の方程式に従うものとする。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t)=\gamma(\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'(t))\times\mathbf{M}(t) \tag{1}$$

ここで $\mathbf{H}_0$ は z 軸に平行な定常磁場で $\mathbf{H}'(t)$ はまわりとの相互作用による fluctuating な磁場である：

$$\mathbf{H}_0=(0,\ 0,\ H_0),\quad \mathbf{H}'(t)=(H_x'(t),\ H_y'(t),\ H_z'(t)). \tag{2}$$

$\mathbf{H}'(t)$ があるために平均の磁気能率 $\langle\mathbf{M}(t)\rangle$ は定常磁場 $\mathbf{H}_0$ できまるゼロでない値に近ずく。新しい変数 $\mathbf{m}(t)$ を次によって導入する。

$$\mathbf{M}(t)=e^{iL_0t}\,\mathbf{m}(t) \tag{3}$$

ここに

$$iL_0=\begin{bmatrix}0 & -\gamma H_0 & 0\\ \gamma H_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4}$$

$\mathbf{M}(t)$ と $\mathbf{m}(t)$ を次に従って展開する。

$$\mathbf{X}(t)=\frac{1}{2}X_+(t)\,u_1+\frac{1}{2}X_-(t)\,u_2+X_z(t)\,u_3 \tag{5}$$

$$\mathbf{X}\equiv\mathbf{M},\ \mathbf{m}$$

ここで $u_1,\ u_2,\ u_3$ は iL_0 の固有ベクトルである：

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

このとき次が成り立っている

$$X_+ = X_x + i X_y, \qquad X_- = (X_+)^*$$

及び

$$M_+(t) = e^{i\gamma H_0 t} m_+(t), \quad M_z(t) = m_z(t) \tag{6}$$

ここに＊は複素共やくを表わす。

(3) を t で微分して次を得る

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = i L_0 \mathbf{M}(t) + e^{iL_0 t}\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) \tag{7}$$

従って，

$$\langle \dot{\mathbf{M}}(t) \rangle = i L_0 \langle \mathbf{M}(t) \rangle + e^{iL_0 t} \langle \dot{\mathbf{m}}(t) \rangle \tag{8}$$

又，$\langle M_x(t) \rangle_0 = \langle M_y(t) \rangle_0 = 0$ 及び $\langle M_z(t) \rangle_0 = \langle M_z \rangle_0$ であるから (6) より次を得る： $\langle m_x(t) \rangle_0 = \langle m_y(t) \rangle_0 = 0$ 及び $\langle m_z(t) \rangle_0 = \langle M_z \rangle_0$。 ここに $\langle \cdots\cdots \rangle_0$ は $\mathbf{H}_0$ がかかっている熱平衡に於ける平均値を意味する。 以前議論したように平均値の運動方程式は二種類の期待値の方程式から適当な外部パラメータを消去することによって得られる。[3] いまの場合この外部パラメーターは初期状態で $\langle \mathbf{M} \rangle_0$ とは異なる期待値を与えるべくかけた余分の定常磁場である。$\langle \mathbf{m} \rangle_0$ のまわりで展開して $\langle \mathbf{m}(t) \rangle$ に対する運動方程式が得られる

$$\langle \dot{\mathbf{m}}(t) \rangle = \alpha(t)\left[\langle \mathbf{m}(t) \rangle - \langle \mathbf{m} \rangle_0 \right] + \cdots\cdots \tag{9}$$

ここで，

$$\alpha(t) = \dot{G}_0(t)\, G_0(t)^{-1} \tag{10}$$

$$\left[G_0(t) \right]_{\alpha\beta} = (\delta m_\alpha(t),\ \delta m_\beta) = (\delta m_\alpha(t),\ \delta M_\beta) \tag{11}$$

$$\alpha,\ \beta = x,\ y,\ z\ ,$$

$$(A, \beta) = \int_0^1 \langle B(i\hbar\beta\lambda)A\rangle_0\, d\lambda\ ,$$

$$B(i\hbar\beta\lambda) = e^{\beta\lambda H_0} B\, e^{-\beta\lambda H_0}\ .$$

(8), (9) 及び (6) より次が得られる,

$$\langle\dot{\mathbf{M}}(t)\rangle = i\ L_0 \langle\mathbf{M}(t)\rangle + e^{iL_0 t}\alpha(t)e^{-iL_0 t}[\langle\mathbf{M}(t)\rangle - \langle\mathbf{M}\rangle_0] + \cdots\cdots \quad (12)$$

(1), (3) 又は (6) から $\mathbf{m}$ の従う方程式が得られるが，それらを使えば次が得られる

$$(\delta\dot{m}_+(t),\ \delta\dot{m}_-) = 2\psi_\perp(t)e^{-i\gamma H_0 t}(\delta m_z(t),\ \delta m_z) + \psi_{||}(t)(\delta m_+(t),\ \delta m_-) \quad (13a)$$

$$(\delta\dot{m}_z(t),\ \delta\dot{m}_z) = \mathcal{R}_e\ \psi_\perp(t)\,e^{i\gamma H_0 t}(\delta m_+(t),\ \delta m_-) \quad (13b)$$

$$\left.\begin{aligned}(\delta\dot{m}_+(t),\ \delta\dot{m}_+) &= -\psi_{||}(t)(\delta m_+(t),\ \delta m_+)\\ (\delta\dot{m}_+(t),\ \delta\dot{m}_z) &= -\psi_{||}(t)(\delta m_z(t),\ \delta m_+)\end{aligned}\right\} \quad (13c)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}\psi_\perp(t) &\equiv \gamma^2(H'_x(t),\ H'_x) = \gamma^2(H'_y(t),\ H_y)\\ \psi_{||}(t) &\equiv \gamma^2(H'_z(t),\ H'_z)\end{aligned}\right\} \quad (14a)$$

$$(H'_\alpha(t),\ H'_\beta) = \langle H'_\alpha(t)\rangle_0 = 0 \quad \text{for} \quad \alpha \neq \beta \quad (14b)$$

(13) を導くために次の様な近似を使った：

$$(H'_x(t)\,m_+(t),\ H'_x\,m_-) \doteqdot (H'_x(t),\ H'_x)(m_+(t),\ m_-)\ .$$

上の相関関数から $\alpha(t)$ を計算するために次の二つの仮定を行う。第一に $\psi_{||}$ と $\psi_\perp$ の相関時間, τ_c, は $(\delta m_\alpha(t),\ \delta m_\beta)$ の相関時関に比べて十分短いものとする。第二に $\alpha(t)$ は $t > \tau_c$ で定常値をとるものとする。以上のことから (13) の右辺及び (10)

の右辺にある二時間相関関数 $(\delta m_\alpha(t),\ \delta m_\beta)$ を同時刻相関関数で置きかえる。その結果 (13) は

$$(\delta \dot{m}_+(t),\ \delta \dot{m}_-) = 2[\psi_\perp(t)\, e^{-i\gamma H_0 t} \chi_{||} + \psi_{||}(t)\,\chi_\perp] kT \tag{15a}$$

$$(\delta \dot{m}_z(t),\ \delta \dot{m}_z) = 2\psi_\perp(t)\, kT \chi_\perp \cos \gamma H_0 t \tag{15b}$$

$$(\delta \dot{m}_+(t),\ \delta \dot{m}_+) = (\delta \dot{m}_+(t),\ \delta \dot{m}_z) = 0 \tag{15c}$$

となる，ここに

$$kT\,\chi_{||} = (\delta M_z,\ \delta M_z),\quad kT\,\chi_\perp = (M_x,\ M_x) = (M_y,\ M_y) \tag{16}$$

これから次を得る：

$$(\delta \dot{m}_x(t),\ \delta \dot{m}_y) = -(\delta \dot{m}_y(t),\ \delta \dot{m}_x) = \psi_\perp(t)\, kT\chi_{||}\ \sin\ \gamma H_0 t \tag{17}$$

$$(\delta \dot{m}_x(t),\ \delta \dot{m}_x) = (\delta \dot{m}_y(t),\ \delta \dot{m}_y) = \psi_\perp(t)\, kT\chi_{||}\ \cos\ \gamma H_0 t + \psi_{||}(t)\, kT\chi_\perp \tag{18}$$

(15b)，(17)，(18) 以外はゼロとなる。

(15b)，(17)，(18) を積分して $(\delta \dot{m}_\alpha(t),\ \delta m_\beta)$ 型の相関関数を得る。例えば

$$\int_0^t (\delta \dot{m}_z(t'),\ \delta \dot{m}_z)\, dt' = (\delta m_z(t),\ \delta \dot{m}_z) = -(\delta \dot{m}_z(t),\ \delta m_z) = 2kT\,\chi_\perp \int_0^t \psi_\perp(t') \cos \gamma H_0 t'\, dt',\quad \text{等々。}$$

ここで $(\delta \dot{m}_z,\ \delta m_z)$ の様な同時刻相関は $\langle H' \rangle_0$ のオーダーとして無視する。以上の相関関数が $\dot{G}_0$ を与える。したがって次を得る

$$\alpha(t) = i\,\delta L'(t) - D''(t) \tag{19}$$

$$i\,\delta L'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\omega'(t) & 0 \\ \delta\omega'(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D''(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_2'(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{T_2'(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{T_1'(t)} \end{bmatrix} \tag{20}$$

ここに

$$T_1'(t) = \tau_1(t)\frac{\chi_{||}}{\chi_\perp}, \quad \frac{1}{T_2'(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_0(t)} + \frac{1}{\tau_1(t)}\,\frac{\chi_{||}}{\chi_\perp}\right), \tag{21}$$

$$\delta\omega'(t) = \delta\omega(t)\frac{\chi_{||}}{\chi_\perp}, \quad \delta\omega(t) = \int_0^t \psi_\perp(t')\sin\gamma H_0 t' dt' \tag{22}$$

$$\frac{1}{2\tau_0(t)} = \int_0^t \psi_{||}(t')dt', \quad \frac{1}{2\tau_1(t)} = \int_0^t \psi_\perp(t')\cos\gamma H_0 t' dt' \tag{23}$$

(19) を (12) に代入して

$$\alpha(t)L_0 - L_0\alpha(t) = 0 \tag{24}$$

に着目して次のブロッホ方程式を得る：

$$<\dot{\mathbf{M}}(t)> = i(L_0 + \delta L'(t))<\mathbf{M}(t)> - D''(t)[<\mathbf{M}(t)> - <\mathbf{M}>_0] + \cdots\cdots \tag{25}$$

H_0 が小さい場合 $\chi_{||} = \chi_\perp = \chi$ と置いてよい。又 $<\mathbf{M}>_0 = \chi\mathbf{H}_0$ と置いてよい。さらに時間 t が τ_c に比べて十分大きいとき $\delta L(t)$ を $\delta L(\infty)$ で $D''(t)$ を $D''(\infty)$ で置きかえてよい。その場合 (25) はこれまで得られた結果[1,2,4]に一致する。ただし χ 及び ψ は量子論的に与えられている。

最後に有益な助言をして下さった森肇先生に感謝します。

References

1) A. Kawabata, Prog. Theor. Phys. **48** (1972), 2237.
2) R. Kubo and N. Hashitsume, Prog. Theor. Phys. Supple. No. 46 (1970), 210.
3) H. Furukawa, Prog. Theor. Phys. **50** (1973), 332.
4) M. Tokuyama and H. Mori, preprint.